

[illegible][illegible]

Aufgabe 1 (10 Punkte)
 Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$$
 gegeben.

- (a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und die Nullstellen von $f'(x)$.
- (b) Untersuchen Sie $f(x)$ auf Monotonie und Extrema.
- (c) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$.

Lösung:

(a) Die Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$$

Die Nullstellen von $f'(x)$ sind die Lösungen der Gleichung:

$$\frac{3}{2}x^2 - 3x + 2 = 0$$

Multipliziert man mit 2, erhält man:

$$3x^2 - 6x + 4 = 0$$

Die Diskriminante ist:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 = -12 < 0$$

Da $\Delta < 0$, hat die Gleichung keine reellen Lösungen. Folglich hat $f'(x)$ keine Nullstellen.

(b) Da $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$ eine nach oben geöffnete Parabel ist und $\Delta < 0$, gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x)$ ist also auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(c) Der Graph von $f(x)$ ist eine kubische Funktion, die streng monoton wachsend ist. Sie hat einen y-Achsenabschnitt bei -1 .

Aufgabe 2 (10 Punkte)
 Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x}$$
 für $x > 0$.

- (a) Berechnen Sie $g'(x)$.
- (b) Untersuchen Sie $g(x)$ auf Extrema.

Lösung:

(a) Die Ableitung von $g(x)$ ist:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2}$$

(b) Um die Extrema zu finden, setzen wir $g'(x) = 0$:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Multipliziert man mit $x^2(x^2 + 1)$, erhält man:

$$2x^3 + x^2 + 1 = 0$$

Die Diskriminante ist:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Da $\Delta < 0$, hat die Gleichung keine reellen Lösungen. Folglich hat $g(x)$ keine Extrema.

[illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible][illegible]

Exam page number - 4 -	1 1 1. The following text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow. 2. The text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow.	2 2. The text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow.	3 3. The text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow.
Exam page number - 4 -	1 1. The following text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow. 2. The text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow.	2 2. The text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow.	3 3. The text is a short extract from a book. Read it carefully and then answer the questions that follow.

[illegible][illegible]